

25.9.

(F) Absolutní hodnota

Def: absolutní hodnota
reálného čísla x je definována:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0 \\ -x, & \text{pokud } x \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Pr}}: |5| &= 5, & \text{protože } 5 \geq 0 \\ |-5| &= -(-5) = 5, & \text{protože } -5 \leq 0 \\ |0| &= 0 = -0 & (\text{nula}) \end{aligned}$$

splňuje obě podmínky!
je to tzv. hraniční bod

$$\underline{\text{Pr}}: |x-2| =$$

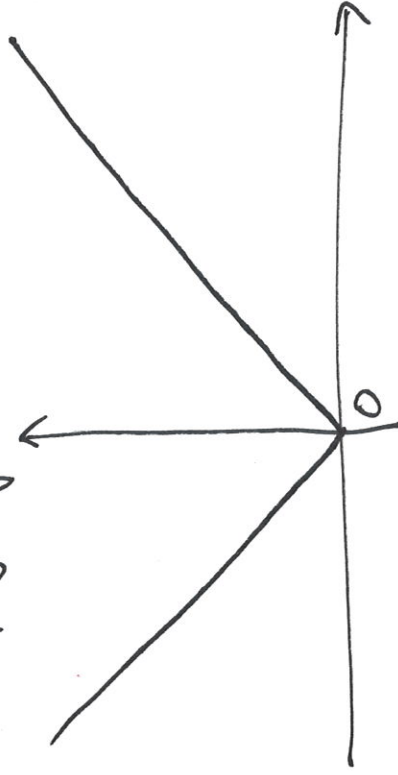
$$= \begin{cases} x-2, & \text{pokud } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) = 2-x, & \text{pokud } x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

Číslo 2 = hraniční bod

Na abs. hodnotu se díváme
také jako na fci: $f(x) = |x|$,

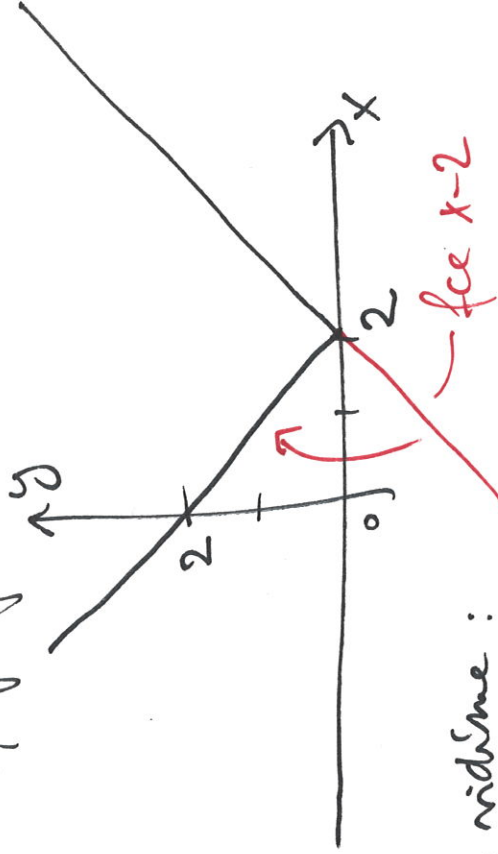
$D_f = \mathbb{R}$, graf:



Víme: $\forall x \in \mathbb{R}: |x| \geq 0$

Pr: $f(x) = |x-2|$

$D_f = \mathbb{R}$, graf:



To vidíme:

- z definice
- posunem grafu $|x|$ o 2 doprava
- zrcadlením záporné části
přímky $y = x-2$ podle osy x

G) Mocniny a odmocniny

chci zavést a^n , $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Def: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ krát}}$

= n -tá mocnina čísla a

Dále, pro $n=0$ definujeme:

$a^0 = 1$ (nulta mocnina)

včetně případu $a=0$: $0^0 = 1$.

a = základ (mocněnec)

n = exponent (mocnitel)

Platí: $a \in \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{N}_0$:

① $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

② $a^{b \cdot c} = (a^b)^c = (a^c)^b$

Pr: $a=10, b=2, c=3$

① $10^{2+3} = 10^5 = 100\,000$

$10^2 \cdot 10^3 = 100 \cdot 1000 //$

② $10^{2 \cdot 3} = 10^6 = 1\,000\,000$

$(10^2)^3 = (100)^3 = 1\,000\,000$

$(10^3)^2 = (1000)^2 = 1\,000\,000$

Def: n-tá odmocnina z reálného

čísla a je číslo b = $\sqrt[n]{a}$,

spĺňajúce $a = b^n$

$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow a = b^n$

Tj: n-tá odmocnina je inverzná operácia (funkcia) k n-té mocnině.

Toto se zavádí pro $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$),
a pro $n=2$ píšeme $\sqrt{a}$.

Def. obor:

Pro n sudé je $\sqrt[n]{a}$ definována

pouze pro $a \geq 0$, pak $\sqrt[n]{a} \geq 0$.

Pro n liché je $\sqrt[n]{a}$ definována

pro $\forall a \in \mathbb{R}$, pak $\sqrt[n]{a}$ má

stejně znaménko jako číslo a.

Pr: $2^5 = 32$

$\sqrt[5]{32} = 2$

$(-2)^5 = -32$

$\sqrt[5]{-32} = -2$

$3^4 = 81$

$\sqrt[4]{81} = 3$

$(-3)^4 = 81$

ale $\sqrt[4]{81} \neq -3$!

a $\sqrt[4]{-81}$ není defin.

Pozor: rovnice $x^4 = 81$ má

dvě řešení: $x_1 = 3 = \sqrt[4]{81}$

$$x_2 = -3 = -\sqrt[4]{81}$$

Jiný zápis odmocniny:

pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ lze psát

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

— pro $n=2$

Zdůvodnění:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \stackrel{②}{=} a^{\left(\frac{1}{n} \cdot n\right)} = a^1 = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \stackrel{\text{def.}}{=} a$$

$$\Rightarrow \text{proto } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Dále zavedeme pro $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \quad (a \in \mathbb{R}, \{0\})$$

Zdůvodnění:

$$a^n \cdot a^{-n} \stackrel{①}{=} a^{(n-n)} = a^0 = 1$$

$$a^n \cdot \frac{1}{a^n} = 1 \Rightarrow \text{proto } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{Dále def. } a^{\frac{m}{n}} \stackrel{②}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

pro libovolná $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

Tím jsme zavedli mocniny s racionálním exponentem ($= \frac{m}{n}$) a platí pro ni stále vzorce ①, ②
Proto: $a^{\frac{m}{n}}$ je def. pro $a > 0$ (n liché)
pro $a \neq 0$ (n liché)

(H) Exponenciála a logaritmus

Def.: exponenciála se základem a

je funkce, znač se a^x , kde

$a \in \mathbb{R}_+$... základ (pevné číslo)

$x \in \mathbb{R}$... exponent (proměnná)

Chceme, aby tato fce měla tyto

vlastnosti:

(1) pro exponent $x = n \in \mathbb{N}_0$ se

jedná o n -tou mocninu: $a^n = a \cdot \dots \cdot a$
 $a^0 = 1$

(2) pro exponent $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

platí: $a^x = a^{\frac{m}{n}}$

(3) a^x je definováno pro
+ reálná čísla x

(4) a^x splňuje rovnice

$$(1) a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$(2) a^{x \cdot y} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

(pro $\forall x, y \in \mathbb{R}$)

Na základě pořadovho

(1) (2) (3) (4) lze fci

a^x jednoznačně zapsat.

Existuje význačná hodnota
základu, tzv. Eulerovo číslo

$$e \doteq 2,71828 \quad (\text{irac. číslo})$$

(stačí $e \doteq 2,72$)

Pak $e^x =$ exponenciála s přírodním
základem

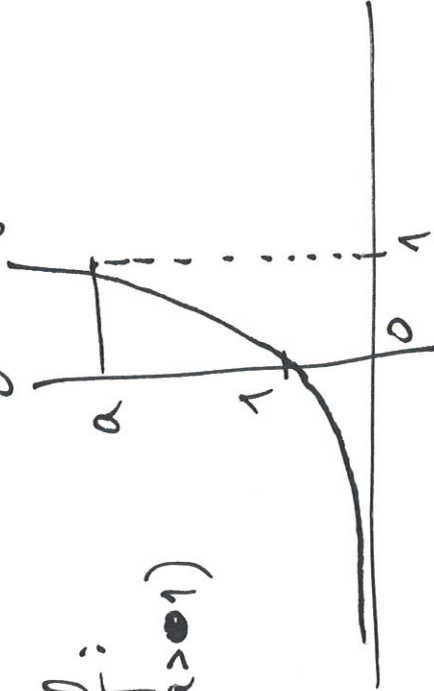
Píše se též někdy $e^x = \exp x$

Důležitá vlastnost:

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}: a^x > 0 \quad \text{! !}$$

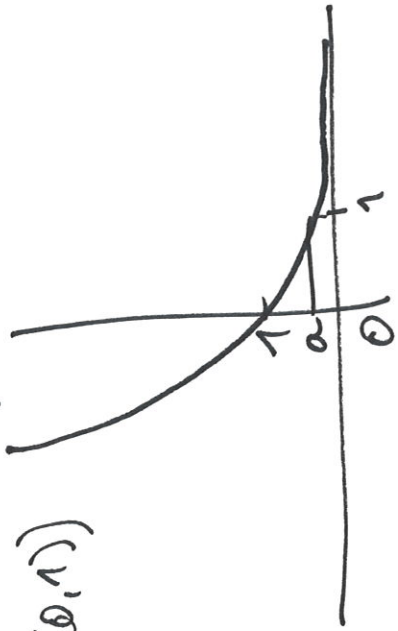
tj. exponenciála o libovolném základu má vždy jen kladných hodnot !

Graf:
(pro $a > 1$)



$$\text{vždy } \boxed{a^0 = 1} \quad \boxed{a^1 = a}$$

(pro $a \in (0, 1)$)



Logaritmus o základu a

je inverzní operace (fc)

k exponenciále a^x .

označení: $\boxed{\log_a x}$

"logaritmus čísla x o základu a"

$$\boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y}$$

základ: $a \in \mathbb{R}_+$, navíc $a \neq 1$ (pevně)

argument logaritmu: $x \in \mathbb{R}_+$ (proměnná)

hodnota logaritmu: $y \in \mathbb{R}$

Proč musíme být $x > 0$?

Protože $x = a^y > 0$ vždy.

Tedy def. obor logaritmu: $\boxed{D_f = \mathbb{R}_+}$!

Pr: $8 = 2^3 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

$(a=2, y=3, x=8)$
 $\uparrow$ základ $\uparrow$ argument log.

"Na kolikátou musím umocnit

2, abych dostal 8?" - "Na 3."

Pr: $\log_5 25 = 2$
 $\log_5 \frac{1}{25} = -2$ ($5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$)
 $\log_3 3 = \frac{1}{2}$ ($3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 3$)

Platí: (1) $\forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$:

$\log_a 1 = 0$
 $\log_a a = 1$
 $\log_a (a^n) = n$

(2) $\forall a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \forall x, y \in \mathbb{R}_+$

$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a (x^2) = 2 \cdot \log_a x$

$\log_a (\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \log_a x$

(3) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

"převod na jiný základ"

Speciální případ: základ = e

... přirozený logaritmus ... ozn. $\boxed{\ln x}$

je to inverze fce $k e^x$:

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$

Pak platí (3): $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

Další ~~spec.~~ případ: $a=10$

dekadický (dekadický) logaritmus

staré označení: $\log x = \log_{10} x$

$$\begin{array}{l} \text{Pr: } \log 100 = 2 \\ \log 1000 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log 100 = 2 \\ \log 1000 = 3 \end{array}} \right\} \text{ počet nul!}$$

$$\begin{aligned} \log(100\,000) &= \log(100 \cdot 1000) = \\ &= \log(100) + \log(1000) = \\ &= 2 + 3 \end{aligned}$$

Logaritmus převádí násobení
na sčítání $\rightarrow$ počítání s logaritmy.

tabulkami:

$$\begin{array}{l} \text{Pr: } 8,36 - 14,58 : \\ \log 8,36 \doteq 0,922 \\ \log 14,58 \doteq 1,164 \\ \hline 2,086 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \rightarrow \text{součin je přibližně} \\ 10^{2,086} \doteq 121,34 \\ \hline \text{Přesně: } 121,88 \end{array}$$